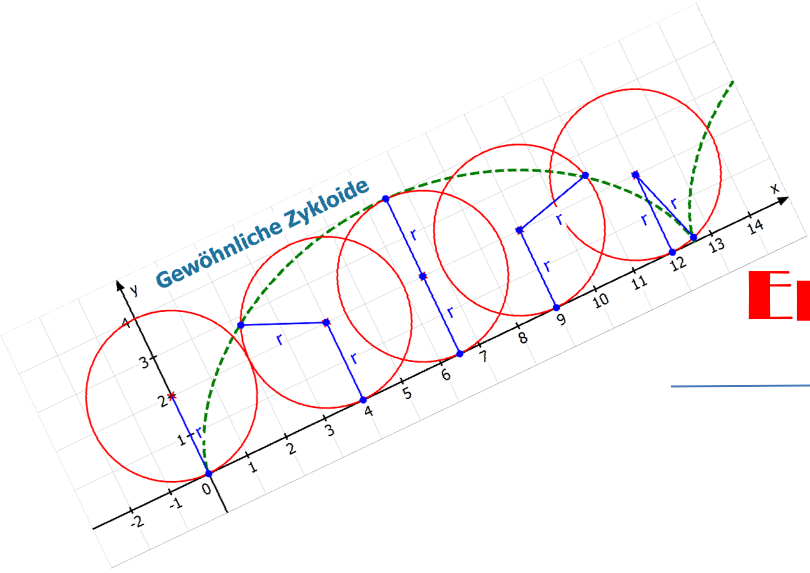



# Zykloiden und Epizykloiden

Text Nummer 54101

10. Mai 2016

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

## Vorwort

Die Zykloiden sind berühmte und sehr oft verwendete Beispiele für Kurven. Vor allem ist die Art ihrer Entstehung geradezu spektakulär, es sind nämlich sogenannte Rollkurven.
Man kann sehr viele Aufgaben an ihr üben, wenn auch die Integrationsrechnungen schwierig sind.
Die Theorie für die Berechnungsformeln steht im Text 54011 Differentialgeometrie.

*Literatur: Wikipedia (https://de.wikipedia.org/wiki/Zykloide):*



## Inhalt

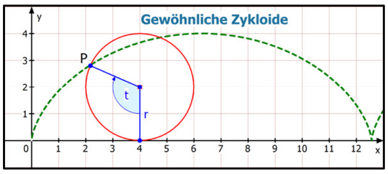
# 1 Vorschau

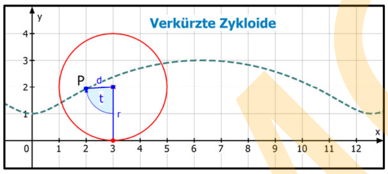
**Zykloiden** sind Rollkurven, die beim Abrollen eines Kreises auf einer Geraden dadurch entstehen, dass man die Bahn eines mitgedrehten Punktes als Kurve festhält. Liegt der Kurvenpunkt auf dem Kreisrand, dann entsteht die gewöhnliche Zykloide, liegt der Punkt weiter innen im Kreis, entsteht die verkürzte Zykloide, liegt er gar außerhalb der Kreisfläche, entsteht eine Schleifenzykloide (verlängerte Zykloide). Die verkürzten oder verlängerten Zykloiden nennt man auch Trochoiden.

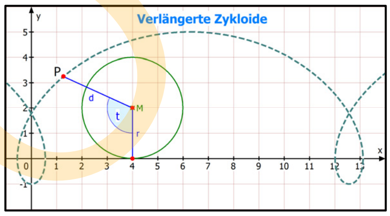
Parametergleichung der Zykloide: $x(t) = r \cdot (t - \sin(t))$ $\quad y(t) = r(1 - \cos(t))$

Parametergleichung der Trochoide: $x(t) = r \cdot t - a \cdot \sin(t)$ $\quad y(t) = r - a \cdot \cos(t)$

Dabei ist a der Abstand des Kreispunktes vom Mittelpunkt der Kreisscheibe.
Ist a < r, liegt eine verkürzte Zykloide vor, für a > r entsteht eine Schleifenzykloide.
t ist der Abrollwinkel der Kreisscheibe im Bogenmaß.








## Epizykloiden und Hypozykloiden

Rollt der Kreis anstatt auf einer Gerade <u>auf</u> einem anderen Kreis ab, entsteht eine Epizykloide, rollt sie <u>im Innern</u> des Kreises ab, spricht man von einer Hypozykloide oder auch Asteroide (mehr dazu siehe Text 54115).

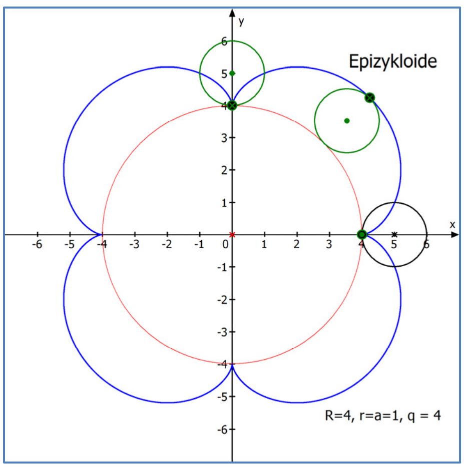
Parameterdarstellung für eine **Epizykloide**:

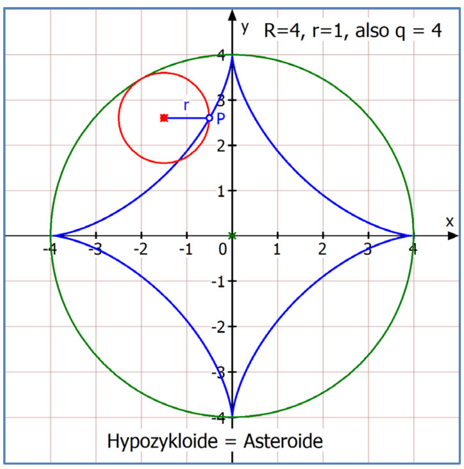
$$\begin{Bmatrix} x(t) = r(1+q)\cdot\cos(t) - r\cdot\cos((1+q)t) \\ y(t) = r(1+q)\cdot\sin(t) \ - r\cdot\sin((1+q)t) \end{Bmatrix}$$

Parameterdarstellung für eine **Hypozykloide**:

$$\begin{Bmatrix} x(t) = r(q-1)\cdot\cos(t) - r\cdot\cos((q-1)t) \\ y(t) = r(q-1)\cdot\sin(t) \ - r\cdot\sin((q-1)t) \end{Bmatrix}$$

Der Basiskreis hat den Radius R, der abrollende Kreis hat den Radius r, ihr Quotient ist $q = \frac{R}{r}$.





# Zykloiden und Trochoiden

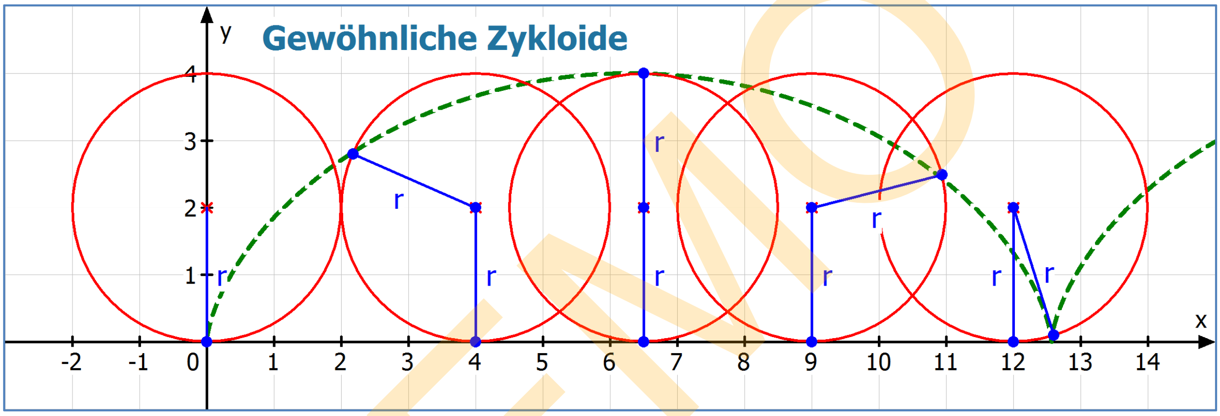
## 2 Gewöhnliche Zykloiden

Eine Zykloide ist eine Kurve, die so dargestellt werden kann:

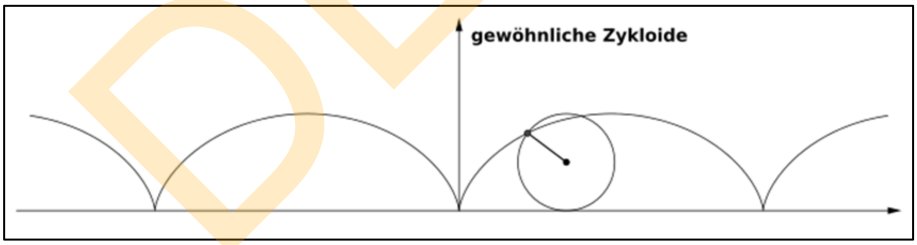
$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= r\cdot\left(t-\sin(t)\right) \\ y(t) &= r\left(1-\cos(t)\right) \end{aligned}}$$

bzw. in Vektorform: $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} r\cdot\left(1-\sin(t)\right) \\ r(1-\cos(t) \end{pmatrix}$

Eine **gewöhnliche Zykloide** entsteht, wenn ein Kreis auf einer Geraden abrollt. Anschaulich gesprochen bewegt sich ein Punkt auf einem Reifen eines fahrenden Rades auf einer gewöhnlichen Zykloide. Beispiel: $x(t)=2\left(t-\sin(t)\right)$ und $y(t)=2\cdot\left(1-\cos(t)\right)$. Die 5 Kreise zeigen die Bahn des anfänglich im Ursprung befindlichen Kurvenpunktes, der beim Abrollen des Kreises nach rechts die Bahn einer Zykloide beschreibt. Der Mittelpunkt des Rollkreises bewegt auf y = 2.



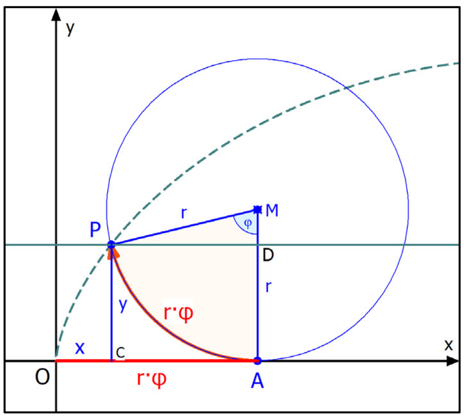

Oder in anderem Maßstab:






**Herleitung der oben angegebenen Gleichungen:**

Gesucht sind die Koordinaten von P in Abhängigkeit vom Radius r und dem Rollwinkel $\varphi$ (der oben t heißt).




1. Der Bogen AP hat die Länge $b=r\cdot\varphi$.
   Die Strecke OA ist gleich lang.
   Ferner gilt $\overline{AC}=\overline{PD}=r\cdot\sin(\varphi)$.
   Daher gilt (auf der x-Achse):
   $x=r\cdot\varphi-r\cdot\sin(\varphi)=r\cdot\left(\varphi-\sin(\varphi)\right)$

2. Es ist $\overline{DM}=r\cdot\cos(\varphi)$. Daher folgt:
   $y=\overline{AD}=\overline{AM}-\overline{DM}=r-r\cdot\cos(\varphi)=r\left(1-\cos(\varphi)\right)$

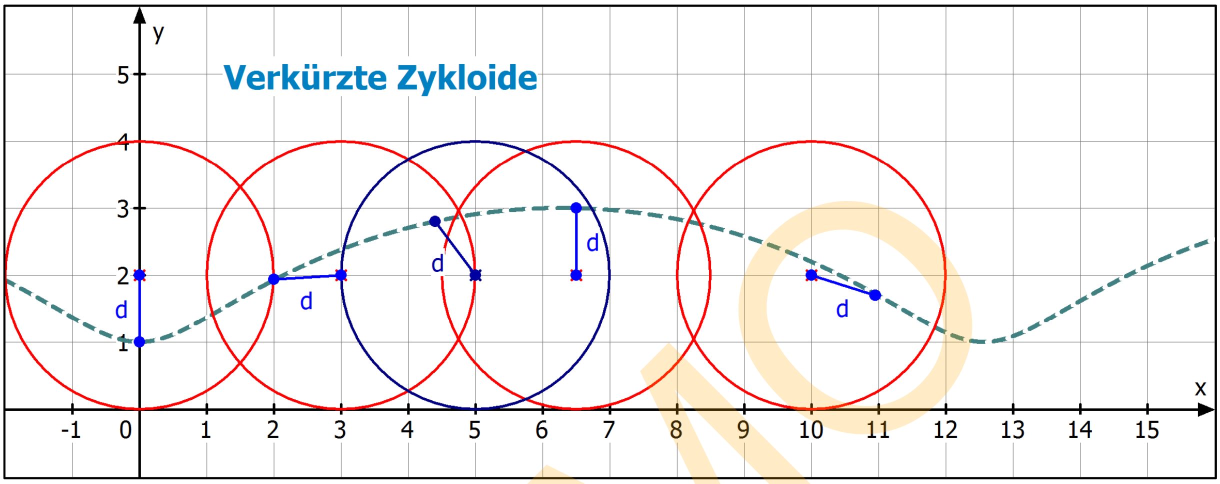
# 3 Verkürzte Zykloiden

Eine **verkürzte Zykloide** entsteht, wenn die Bahn eines Punktes aus dem Inneren der „Kreisscheibe" betrachtet wird, anschaulich etwa der Seitenstrahler beim Fahrrad.

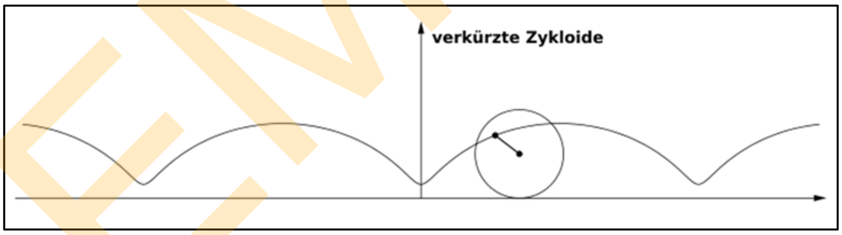
Allgemeine Parametergleichung:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= r\cdot\left(t - a\cdot\sin(t)\right) \\ y(t) &= r\left(1 - a\cdot\cos(t)\right) \end{aligned}}$$

Für a < 1 entsteht eine verkürzte Zykloide, z. B.: $x(t) = 2\cdot\left(t - 0{,}5\cdot\sin(t)\right),\ \ y(t) = 2\cdot(1 - 0{,}5\cdot\cos(t))$

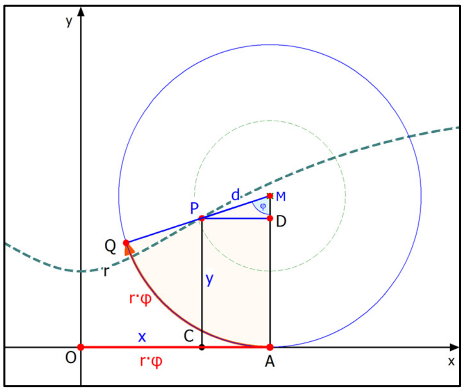



Oder in anderem Maßstab:






## Herleitung der oben angegebenen Gleichungen:




Gesucht sind die Koordinaten von P in Abhängigkeit vom Radius r und dem Rollwinkel $\varphi$ (der oben t heißt).

d ist der Abstand des Punktes P vom Mittelpunkt, also der innere Radius. d ist ein Bruchteil von r, sagen wir $d = a\cdot r$

1. Der Bogen AQ hat die Länge $b = r\cdot\varphi$. $\overline{OA} = \overset{\frown}{AQ}$

   Ferner gilt $\overline{AC} = \overline{PD} = d\cdot\sin(\varphi) = a\cdot r\cdot\sin(\varphi)$.

   Daher gilt (auf der x-Achse): $x = r\cdot\varphi - \overline{PD} = r\cdot\varphi - a\cdot r\cdot\sin(\varphi)$

   $x(\varphi) = r\cdot\left(\varphi - a\cdot\sin(\varphi)\right)$

2. Es ist $\overline{DM} = d\cdot\cos(\varphi) = a\cdot r\cdot\cos(\varphi)$. Daher folgt: $y = \overline{AD} = \overline{AM} - \overline{DM} = r - a\cdot r\cdot\cos(\varphi)$

   $y(\varphi) = r\left(1 - a\cdot\cos(\varphi)\right)$

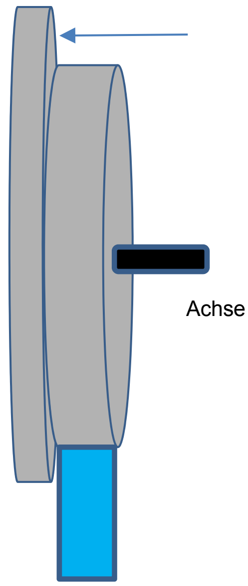
**Hinweise:** In der großen Abbildung war a = 0,5, also d = 0,5 r.

Für eine solche Abbildung gibt man z. B. $M(5\,|\,2)$ vor, berechnet aus $x_M = b = r\cdot\varphi$

$\varphi = t = \frac{x_M}{r} = \frac{5}{2} = 2{,}5$, und erhält dann $x(2{,}5) = 2\cdot\left(2{,}5 - 0{,}5\cdot\sin(2{,}5)\right) \approx 4{,}4$ und

$y(2{,}5) = 2\cdot\left(1 - 0{,}5\cdot\cos(2{,}5)\right) \approx 2{,}8$ (dunkelblauer Kreis oben).

# 4 Verlängerte Zykloide (Schleifenzykloide)




**Eine Schleifenzykloide (verlängerte Zykloide)** ist die Bahn eines Punktes, der außerhalb des abrollenden Kreises liegt und sich mit dem Kreis mitbewegt.
Man kann sich das am Rad einer Lokomotive vorstellen:
Dieses liegt auf der Schiene auf, aber daneben steht ein Teil des Rades über, quasi an der Schiene vorbei, um dem Fahrzeug Halt zu verschaffen.

Gleichungen:

$$x(t) = r\cdot\left(t - a\cdot\sin(t)\right) \quad \text{oder} \quad x(t) = r\cdot t - d\cdot\sin(t)$$
$$y(t) = r\left(1 - a\cdot\cos(t)\right) \qquad\qquad y(t) = r - d\cdot\cos(t)$$

Für d > r, d. h. a > 1 entsteht eine Schleifenzykloide:

z. B.: $x(t) = 2\cdot\left(t - 1{,}5\cdot\sin(t)\right),\ \ y(t) = 2\cdot(1 - 1{,}5\cdot\cos(t))$

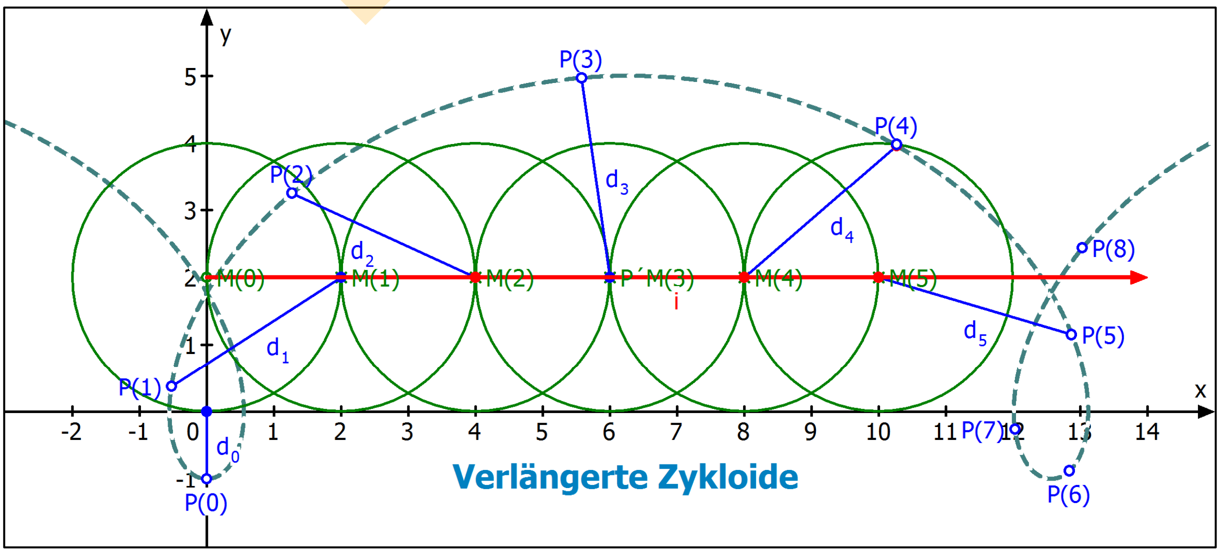
**Aufgabe:** Erstelle mit einem geeigneten Rechner eine Wertetafel für x(t), y(t) und $x_m(t)$ und zeichne die Zykloide samt einigen Kreisen.

**Lösung:**

Ich definiere mit meinem CAS-Rechner TI Nspire eine Vektorfunktion (also eigentlich 3 Funktionen auf einmal):
Die erste Koordinate ist x(t), die zweite y(t).
Mit diesen beiden kann ich die Kurvenpunkte P(t) für t = 0, 1, …, 6 zeichnen.
Die 3. Koordinate ergibt die x-Koordinate des nach rechts rollenden Kreises: $M(2t\,|\,2)$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Define $p(t)=\begin{bmatrix}2\cdot t-3\cdot\sin(t)\\ 2-3\cdot\cos(t)\\ 2\cdot t\end{bmatrix}$ | *Fertig* | $p(3)$ | $\begin{bmatrix}5.57664\\ 4.96998\\ 6.\end{bmatrix}$ |
| $p(0)$ | $\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$ | $p(4)$ | $\begin{bmatrix}10.2704\\ 3.96093\\ 8.\end{bmatrix}$ |
| $p(1)$ | $\begin{bmatrix}-0.524413\\ 0.379093\\ 2.\end{bmatrix}$ | $p(5)$ | $\begin{bmatrix}12.8768\\ 1.14901\\ 10.\end{bmatrix}$ |
| $p(2)$ | $\begin{bmatrix}1.27211\\ 3.24844\\ 4.\end{bmatrix}$ | $p(6)$ | $\begin{bmatrix}12.8382\\ -0.880511\\ 12.\end{bmatrix}$ |

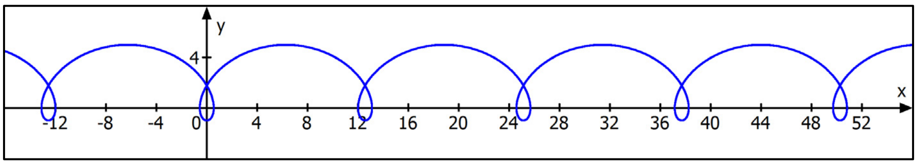
Mit MatheGrafix erstelle ich aus diesen Werten diese Abbildung: r = 2, d = 3, a = 1,5.
Sie zeigt den außerhalb des Kreises liegenden Punkt $P(0) = (0\,|\,-1)$ und seine Weiterentwicklung $P(t) = \left(x(t)\,|\,y(t)\right)$ zusammen mit den Radien $d_t = \overline{M(t)P(t)}$, die stets die Länge 3 LE haben.




Verlängerte Zykloide

Hier zeige ich dieselbe verlängerte Zykloide in einem Maßstab, der 5 Periodenintervalle zeigt.
Die Vektorgleichung dazu lautet:

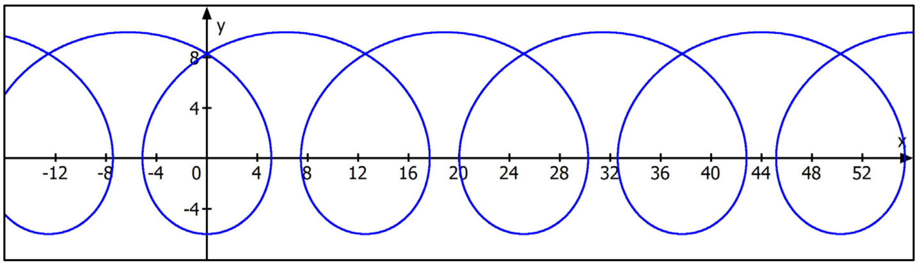
$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2(t - 1{,}5 \cdot \sin(t)) \\ 2(1 - 1{,}5 \cdot \cos(t)) \end{pmatrix}$$



Andere Kurven:

a = 4, r = 2, d = 8:

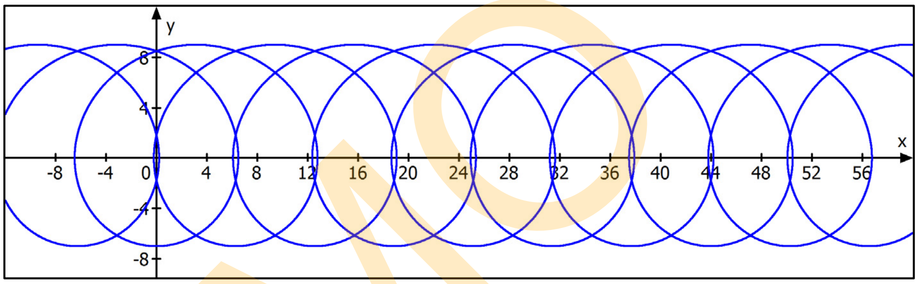
$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2(t - 4 \cdot \sin(t)) \\ 2(1 - 4 \cdot \cos(t)) \end{pmatrix}$$



Oder diese Kurve:

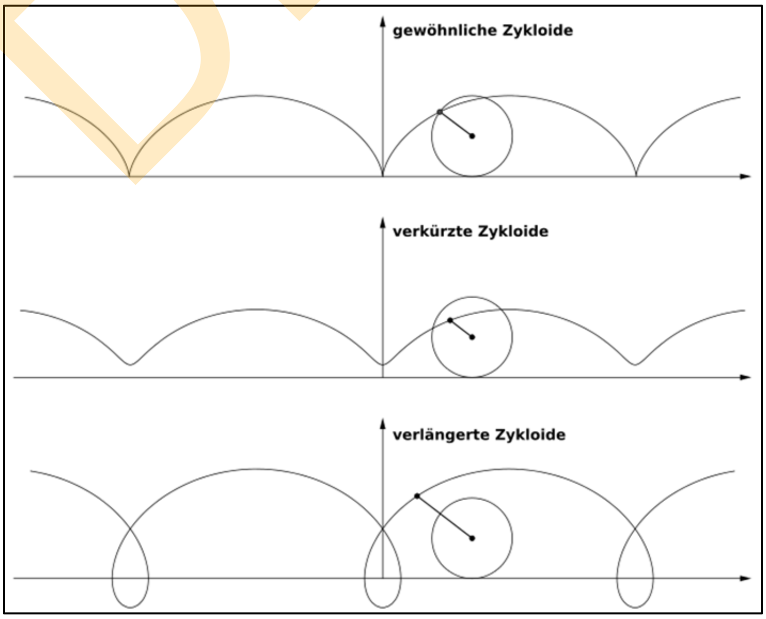
a = 8, r = 1, d = 8:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \cdot (t - 8 \cdot \sin(t)) \\ 1 \cdot (1 - 8 \cdot \cos(t)) \end{pmatrix}$$



Die Form einer gewöhnlichen Zykloide gleicht einer Aneinanderreihung weiterer Bögen, die verlängerte Zykloide weist an den Spitzen zwischen den Bögen noch Schleifen auf, während bei den verkürzten Zykloiden die Spitzen abgerundet sind. Die verkürzten und die Schleifenzykloiden (verlängerte Zykloiden) heißen auch Trochoiden (griechisch τροχός *trochos* »Rad«).





# 5. Tangenten an Zykloiden

Beispielkurve: $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}2t-2\cdot\sin(t)\\2-2\cdot\cos(t)\end{pmatrix}$, $t\in[0\,;2\pi]$

Ableitungen: $\dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}2-2\cdot\cos(t)\\2\cdot\sin(t)\end{pmatrix}$ und $\ddot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}2\cdot\sin(t)\\2\cdot\cos(t)\end{pmatrix}$

Tangentensteigungen: $y'(x)=\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}=\frac{2\cdot\sin(t)}{2-2\cdot\cos(t)}=\frac{\sin(t)}{1-\cos(t)}$

**Kurvenpunkte und Tangenten:**

Für $t=0$ erhält man $\vec{x}(0)=\begin{pmatrix}2\cdot0-2\cdot\sin(0)\\2-2\cdot\cos(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow A(0\,|\,0)$

Die Tangentensteigung in A: $y'(0)=\frac{\dot{y}(0)}{\dot{x}(0)}=\frac{\sin(0)}{1-\cos(0)}=\frac{0}{1-1}=\text{"}\frac{0}{0}\text{"}$ liefert einen unbestimmten Ausdruck, denn Zähler und Nenner werden 0.

Mit dem Satz von de L'Hospital (Zähler und Nenner getrennt ableiten) lässt sich dieser Wert bestimmen: $\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin(t)}{1-\cos(t)}=\lim\limits_{t\to0}\frac{\cos(t)}{\sin(t)}=\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{\tan(t)}\text{"}=\infty\text{"}$:

Die Zykloide hat also im Punkt A eine senkrechte Tangente, die y-Achse.

$t=\frac{1}{4}\pi$ Kurvenpunkt: $\vec{x}(\frac{1}{4}\pi)=\begin{pmatrix}2\cdot\frac{1}{4}\pi-2\cdot\sin(\frac{1}{4}\pi)\\2-2\cdot\cos(\frac{1}{4}\pi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\pi-2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\\2-2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}16\\0{,}58\end{pmatrix}\Leftrightarrow B(0{,}16\,|\,0{,}58)$

Tangentensteigung in B: $y'(0{,}16)=\frac{\dot{y}(\frac{1}{4}\pi)}{\dot{x}(\frac{1}{4}\pi)}=\frac{2\cdot\sin(\frac{1}{4}\pi)}{2-2\cdot\cos(\frac{1}{4}\pi)}=\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}\approx2{,}41$

Der Bruch wurde mit $2+\sqrt{2}$ erweitert.

Tangente in B: $y-0{,}58=2{,}41\cdot(x-0{,}16)\Leftrightarrow\boxed{y\approx2{,}41x+0{,}19}$

$t=\frac{1}{2}\pi$: Kurvenpunkt: $\vec{x}(\frac{1}{2}\pi)=\begin{pmatrix}2\cdot\frac{1}{2}\pi-2\cdot\sin(\frac{1}{2}\pi)\\2-2\cdot\cos(\frac{1}{2}\pi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pi-2\\2\end{pmatrix}\Leftrightarrow C(\pi-2\,|\,2)\approx(1{,}14\,|\,2)$

Tangentensteigung in C: $y'(\pi-2)=\frac{\dot{y}(\frac{1}{2}\pi)}{\dot{x}(\frac{1}{2}\pi)}=\frac{2\cdot\sin(\frac{1}{2}\pi)}{2-2\cdot\cos(\frac{1}{2}\pi)}=\frac{2}{2}=1$

Tangente in C: $y-2=1(x-1{,}14)\Leftrightarrow\boxed{y\approx x+0{,}86}$

$t=\frac{3}{4}\pi$ Kurvenpunkt: $\vec{x}(\frac{3}{4}\pi)=\begin{pmatrix}2\cdot\frac{3}{4}\pi-2\cdot\sin(\frac{3}{4}\pi)\\2-2\cdot\cos(\frac{3}{4}\pi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\pi-2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\\2+2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3{,}30\\3.41\end{pmatrix}\Leftrightarrow D(3{,}30\,|\,3{,}41)$

Tangentensteigung in D: $y'(3{,}30)=\frac{\dot{y}(\frac{3}{4}\pi)}{\dot{x}(\frac{3}{4}\pi)}=\frac{2\cdot\sin(\frac{3}{4}\pi)}{2-2\cdot\cos(\frac{3}{4}\pi)}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2+2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\approx0{,}41$

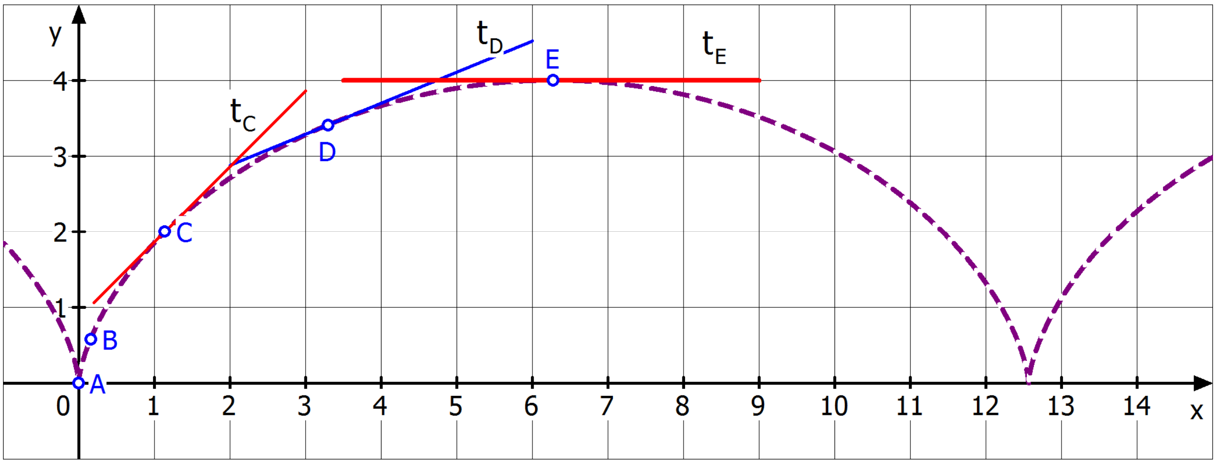
Tangente in D: $y-3{,}41=0{,}41\cdot(x-3{,}3)\Leftrightarrow\boxed{y\approx0{,}41x+2{,}06}$

$t=\pi$: Kurvenpunkt: $\vec{x}(\pi)=\begin{pmatrix}2\cdot\pi-2\cdot\sin(\pi)\\2-2\cdot\cos(\pi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\pi\\4\end{pmatrix}\Leftrightarrow E(2\pi\,|\,4)\approx(6{,}28\,|\,4)$

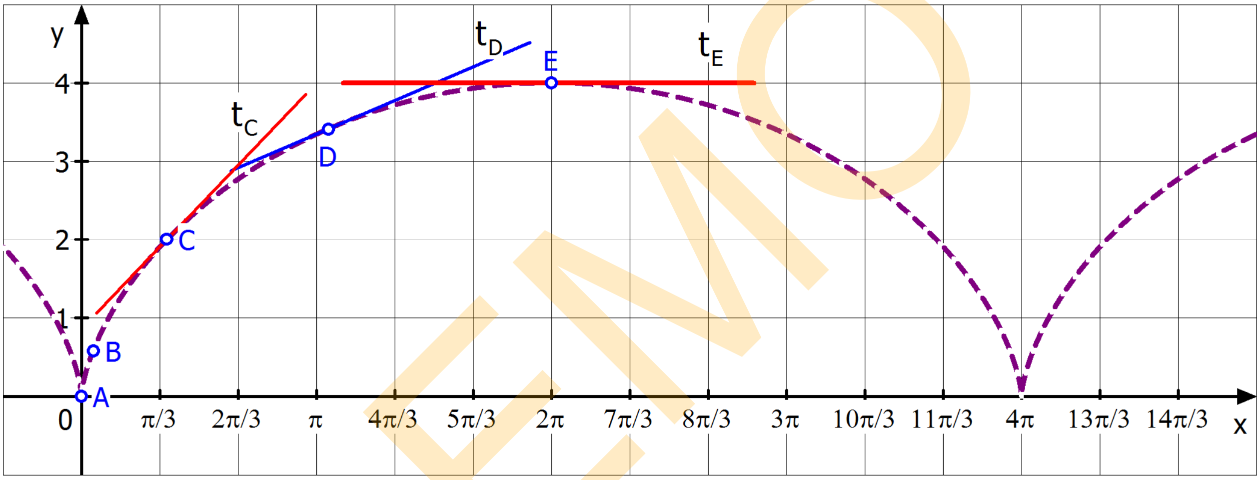
Tangentensteigung in E: $y'(2\pi)=\frac{\dot{y}(\pi)}{\dot{x}(\pi)}=\frac{2\cdot\sin(\pi)}{2-2\cdot\cos(\pi)}=\frac{0}{4}=0$

Tangente in E: $\boxed{y=4}$

Schaubild dieser Zykloide mit den berechneten Tangenten:




Günstiger ist es vielleicht, auf der x-Achse die Einheit $\frac{\pi}{3}$ zu verwenden:



# 6. Krümmungskreis an eine Zykloide

Für die Krümmungsformel $\kappa = \dfrac{\ddot{y}\cdot\dot{x}-\ddot{x}\cdot\dot{y}}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{3/2}}$ benötigt man:

$$\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} rt-r\cdot\sin(t)\\ r-r\cdot\cos(t)\end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix} r-r\cos(t)\\ r\cdot\sin(t)\end{pmatrix} \Rightarrow \ddot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix} r\cdot\sin(t)\\ r\cdot\cos(t)\end{pmatrix}$$

Damit folgt:

$$\kappa = \frac{r\cdot\cos(t)\cdot\left(r-r\cdot\cos(t)\right)-r\cdot\sin(t)\cdot r\cdot\sin(t)}{\left(r^2\left(1-\cos(t)\right)^2+\left(r\cdot\sin(t)\right)^2\right)^{3/2}}$$

$$\kappa = \frac{r^2\cdot\cos(t)-r^2\cdot\cos^2(t)-r^2\cdot\sin^2(t)}{\left(r^2\cdot\left(1-2\cdot\cos(t)+\cos^2(t)\right)+r^2\cdot\sin^2(t)\right)^{3/2}} = \frac{r^2\cdot\cos(t)-r^2\left(\cos^2(t)+\sin^2(t)\right)}{r^2\left(1-2\cos(t)+\left(\cos^2(t)+\sin^2(t)\right)\right)^{3/2}}$$

$$\kappa = \frac{r^2\cdot\cos(t)-r^2}{r^2\left(1-2\cos(t)+1\right)^{3/2}} = \frac{r^2\left(\cos(t)-1\right)}{\left(r^2\left(2-2\cos(t)\right)\right)^{3/2}} = -\frac{r^2\left(1-\cos(t)\right)}{\left(2r^2\left(1-\cos(t)\right)\right)^{3/2}}$$

$$\kappa = -\frac{1}{\sqrt{2}^3 r\left(1-\cos(t)\right)^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\cdot r\cdot\sqrt{1-\cos(t)}}$$

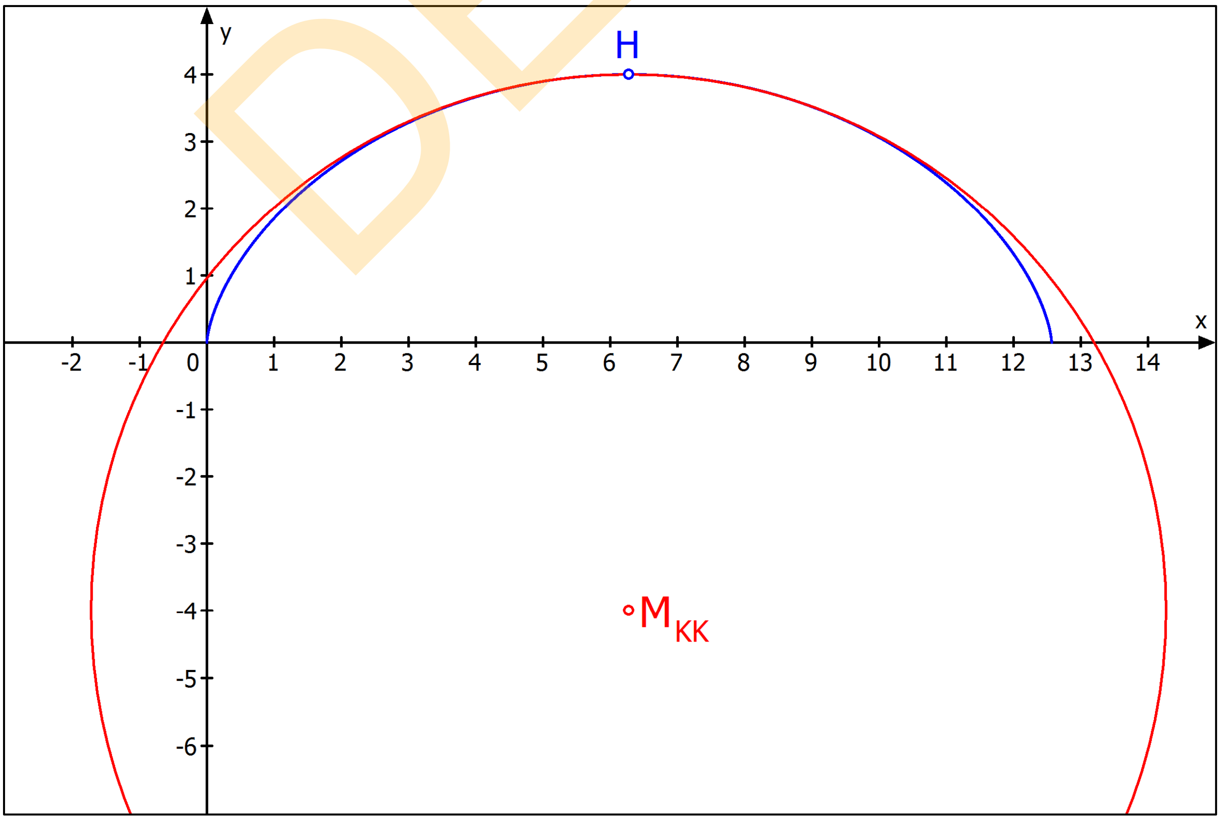
Der Krümmungskreisradius $\rho$ ist davon der Betrag des Kehrwerts: ($\rho$ ist der griech. Buchstabe Rho)

$$\rho = 2\sqrt{2}\cdot r\cdot\sqrt{1-\cos(t)}$$

In der Bogenmitte, also für $t=\pi$ führt dies zu:

$$\rho = 2\sqrt{2}\cdot r\cdot\sqrt{1-\cos(\pi)} = 2\sqrt{2}\cdot r\cdot\sqrt{1+1} = 2\sqrt{2}\cdot r\cdot\sqrt{2} = 4r$$

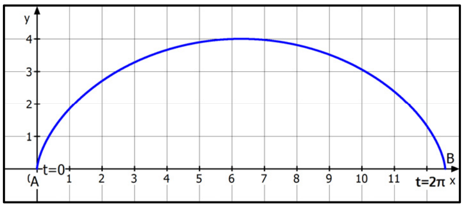
Die folgende Abbildung zeigt diesen Krümmungskreis (rot), der die Zykloide im Hochpunkt $H(2\pi\,|\,4)$ von außen berührt. Wegen r = 2 ist der Radius des Krümmungskreises $\rho = 8$ (LE).



# 7. Bogenlänge einer Zykloide

Die Abbildung gehört zu

$$\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}2t-2\cdot\sin(t)\\2-2\cdot\cos(t)\end{pmatrix}\quad\text{für}\quad t\in[0\,;2\pi]$$




**Allgemeine Berechnung der Bogenlänge einer Zykloide, nachdem sich der erzeugende Kreis um den Winkel $\alpha$ gedreht hat.**

$$\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}r\cdot t-r\cdot\sin(t)\\r-r\cdot\cos(t)\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}r-r\cdot\cos(t)\\r\cdot\sin(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r(1-\cos(t))\\r\cdot\sin(t)\end{pmatrix}$$

$$s(0,\alpha)=\int_0^\alpha\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=\int_0^\alpha\sqrt{r^2(1-\cos(t))^2+r^2\cdot\sin^2(t)}\,dt$$

$$=\int_0^\alpha r\sqrt{1-2\cdot\cos(t)+\underbrace{\cos^2(t)+\sin^2(t)}_{=1}}\,dt=\int_0^\alpha r\sqrt{2-2\cdot\cos(t)}\,dt=r\cdot\int_0^\alpha\sqrt{2(1-\cos(t))}\,dt$$

Zur Vereinfachung benötigt man eine trigonometrische Formel:

Für den doppelten Winkel gilt: $\cos(2\alpha)=1-2\cdot\sin^2\alpha$ (*)

Ersetzt man $\alpha$ durch $\frac{\alpha}{2}$, dann lautet sie $\cos(\alpha)=1-2\cdot\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Durch Umstellen folgt: $1-\cos(\alpha)=2\cdot\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Die Anwendung dieser Formel ergibt:

$$s(0,\alpha)=r\cdot\int_0^\alpha\sqrt{2\cdot2\cdot\sin^2\left(\tfrac{t}{2}\right)}\,dt=2r\cdot\int_0^\alpha\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)dt=2r\cdot\left[\frac{-\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{1}{2}}\right]_0^\alpha=-4r\cdot\left[\cos\left(\tfrac{t}{2}\right)\right]_0^\alpha$$

$$=-4r\cdot\left[\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)-\cos(0)\right]=-4r\cdot\left[\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)-1\right]=4r\cdot\left[1-\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\right]$$

Hier ist eine weitere Umstellung möglich. Ersetzt man in (*) $\alpha$ durch $\frac{\alpha}{4}$, dann entsteht die Formel: $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=1-2\cdot\sin^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)\quad\Leftrightarrow\quad1-\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2\cdot\sin^2\left(\frac{\alpha}{4}\right)$

Damit kann man die Formel für die Bogenlänge auch so darstellen:

$$s(0,\alpha)=8r\cdot\sin^2\left(\tfrac{\alpha}{4}\right)$$

Wir wenden diese Formel an und berechnen die Länge des oben dargestellten Bogens.

Für den ganzen Bogen benötigt man $\alpha=2\pi$:

$$s(0,2\pi)=8r\sin^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=8r$$

Und speziell für r = 2 ergibt das die Bogenlänge 16.

# 8. Aufgaben zur Schleifen-Zykloide

Grundlagen: $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} r\cdot(t-a\cdot\sin(t)) \\ r\cdot(1-a\cdot\cos(t)) \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} r\cdot t-d\cdot\sin(t) \\ r-d\cdot\cos(t) \end{pmatrix}$

Für d > r, d. h. a > 1 erhält man eine Schleifenzykloide, wobei $d=a\cdot r$ ist.

---

(1) Gegeben sei $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} 2t-8\cdot\sin(t) \\ 2-8\cdot\cos(t) \end{pmatrix}$ für $t\in[-\pi\,;3\pi\,]$

a) Berechne einige Punkte und skizziere die Kurve.

b) Bestimme die Koordinaten des Doppelpunktes D auf der y-Achse.

c) Welche Gleichungen haben die Tangenten in D?

d) Unter welchem Winkel schneiden sich die Tangenten in D?

e) Berechne die Nullstellen im Bereich $[-\pi\,;3\pi\,]$.

f) Bestimme für das Intervall $[-\pi;3\pi]$ Hochpunkte, Tiefpunkte, Rechtspunkte, Linkspunkte.

g) Berechne die Bogenlänge einer Schlinge.

h) Berechne den Flächeninhalt einer Schlinge.

i) Rotiert die den Ursprung beinhaltende Schleife um die y-Achse, dann entsteht ein tropfenförmiger Körper. Berechne dessen Volumen mit $V=\pi\int_{t_1}^{t_2}\dot{y}(t)\cdot(x(t))^2\,dt$

(2) Zeige für die allgemeine Schleifenzykloide:

Alle Links- und Rechtspunkte liegen auf der x-Achse.

(3) Zeige für die allgemeine Schleifenzykloide:

a) Ein Doppelpunkt liegt auf der y-Achse, wenn $-\pi<t<\pi$ ist.

b) Für welche Werte von d liegen bei gegebenem r die Doppelpunkte auf Höhe des Mittelpunktes des abrollenden Kreises?

c) Für welches d berühren sich die Schlingen, wenn r gegeben ist?

# Epizykloiden

## 9 Einführung zur Epizykloide

Jetzt lassen wir einen (kleinen) Kreis nicht auf einer Geraden, sondern **außen** auf einem (großen) Kreis abrollen und erhalten eine Kurve namens **Epizykloide.**

Die folgende Abbildung zeigt den „Basiskreis" mit R = 4 cm, den bewegten Kreis mit r = 1 cm, so dass gilt: $q = \frac{R}{r} = 4$

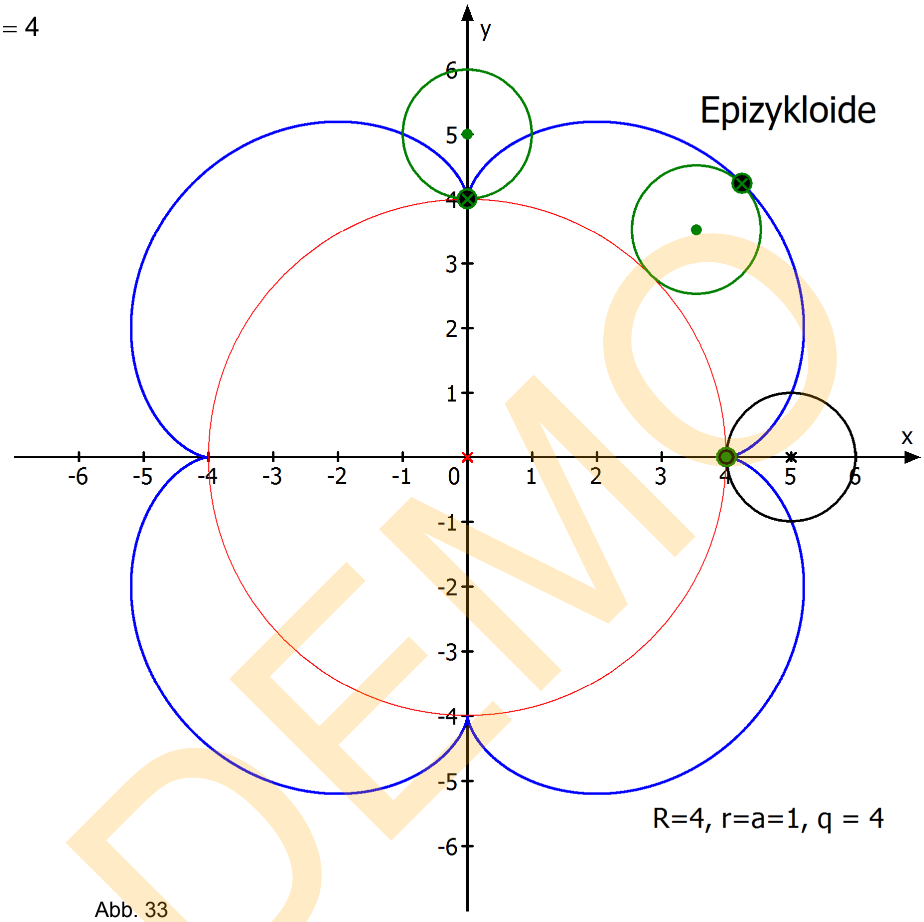


Abb. 33

Die Parametergleichung für die **Epizykloide** lautet in Vektorschreibweise

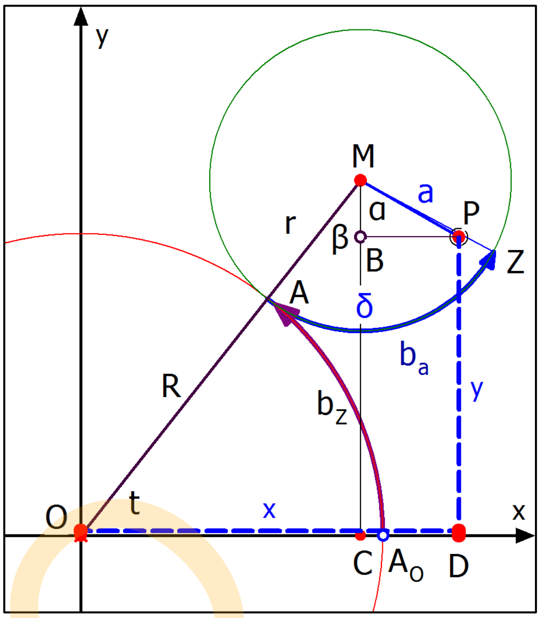
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = r \cdot (1+q) \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} \cos((1+q)t) \\ \sin((1+q)t) \end{pmatrix}$$

d. h. hier:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 5 \cdot \cos(t) - \cos(5t) \\ 5 \cdot \sin(t) - \sin(5t) \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad t \in [0\,;2\pi[$$

Die Herleitung steht auf der nächsten Seite:

## 10 Herleitung der Parametergleichungen für eine Epizykloide.




$P(x\,|\,y)$ ist der wandernde Punkt, dessen Koordinaten gesucht sind. P hat sich beim Abrollen des kleinen Kreises um den Winkel t nach P bewegt.
Der Abstand MP sei a. Ist a = r, dann liegt eine (normale) Epizykloide vor. Durch das Abrollen sind diese Bögen sind gleich lang: $b_z = \overset{\frown}{A_0A}$ auf dem zentralen Kreis und $b_a = \overset{\frown}{AZ}$ auf dem abrollenden Kreis: $\overset{\frown}{A_0A} = \overset{\frown}{AZ}$.

***WISSEN:*** Für die Bogenlänge gilt ($\varphi$ im Bogenmaß) die Formel: $\frac{b}{U} = \frac{\varphi}{2\pi} \Rightarrow b = \frac{2\pi r}{2\pi}\cdot\varphi \Rightarrow \boxed{b = r\cdot\varphi}$

Mit $\overset{\frown}{A_0A} = R\cdot t$ und $\overset{\frown}{AZ} = r\cdot\delta$ folgt daraus

$$R\cdot t = r\cdot\delta \quad\Rightarrow\quad \delta = \frac{R}{r}\cdot t$$

**Berechnung von x:** $x = \overline{OD} = \overline{OC} + \overline{CD} = \overline{OC} + \overline{BP} = (R+r)\cdot\cos(t) + a\cdot\sin(\alpha)$ (*)

mit $\sin(\alpha) = \frac{\overline{PB}}{a} \Rightarrow \overline{PB} = a\cdot\sin(\alpha)$ und $\overline{OC} = (R+r)\cdot\cos(t)$.

**Berechnung von $\alpha$:**

Im Dreieck OCM ist der Winkel bei M: $\beta = \sphericalangle OMC = \frac{\pi}{2} - t$ (Winkelsumme $\pi$)

Daher folgt: $\alpha = \delta - \beta = \frac{R}{r}t - \left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \left(\frac{R}{r}+1\right)t - \frac{\pi}{2} = -\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{R}{r}+1\right)t\right]$

Nebenrechnung: $\sin(\alpha) = \sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{R}{r}+1\right)t\right)\right] \overset{(1)}{=} -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{R}{r}+1\right)t\right) \overset{(2)}{=} \cos\left(\left(\frac{R}{r}+1\right)t\right)$,

wobei verwendet wurde (1) $\sin(-x) = -\sin(x)$ und (2) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$.

Aus (*) folgt damit: $x = (R+r)\cdot\cos(t) + a\cdot\cos\left(\left(\frac{R}{r}+1\right)t\right)$

**Berechnung von y:** $y = \overline{PD} = \overline{MC} - \overline{MB}$ mit $\overline{MC} = (R+r)\cdot\sin(t)$ und $\overline{MB} = a\cdot\cos(\alpha)$

Nebenrechnung: $\cos(\alpha) = \cos\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{R}{r}+1\right)t\right)\right] \overset{(3)}{=} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{R}{r}+1\right)t\right) \overset{(4)}{=} \sin\left(\left(\frac{R}{r}+1\right)t\right)$

wobei verwendet wurde (3) $\cos(-x) = \cos(x)$ und (2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$.

Also gilt: $y = (R+r)\cdot\sin(t) - a\cdot\sin\left(\left(\frac{R}{r}+1\right)t\right)$

Oft verwendet man $q = \frac{R}{r}$, dann folgt:

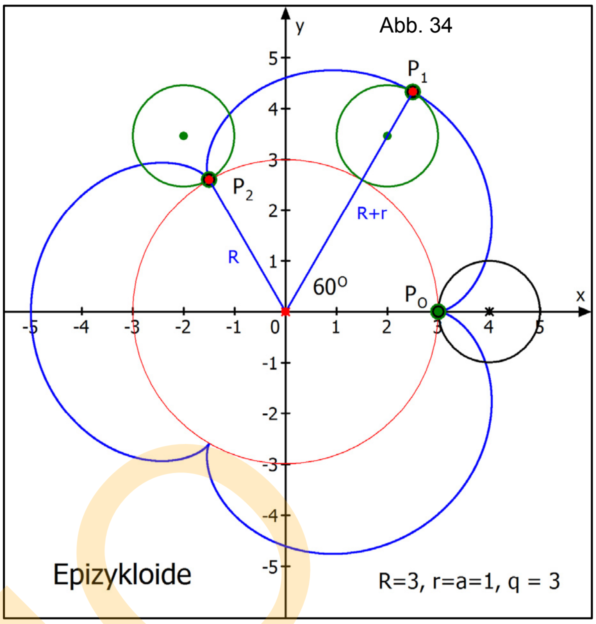
$$\boxed{\overrightarrow{OP} = (R+r)\cdot\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}\cos((q+1)t)\\ -\sin((q+1)t)\end{pmatrix}}$$

# 11. Weitere Epizykloiden

In Abb. 34 umläuft der kleine Kreis mit r = 1 einen großen mit R = 3, also ist q = 3.

Die Gleichung lautet:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4\cdot\cos(t) - \cos(4t) \\ 4\cdot\sin(t) - \sin(4t) \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad t \in [0; 2\pi[$$




**Man erkennt, dass der kleine Kreis dreimal abrollt.**

Der Grund:

Sein Umfang ist $U_{kl} = 2\pi r = 2\pi$ (LE)

Umfang des großen Kreises: $U_{gr} = 2\pi R = 6\pi = 3\cdot U_{kl}$.

Daher beträgt der Winkel $\sphericalangle P_O O P_2 = \frac{1}{3}\cdot 360^O = 120^O$.

$P_1$ hat die Koordinaten $P_1\left(2{,}5 \mid \frac{3}{2}\sqrt{3}\right) \approx (2{,}5 \mid 4{,}33)$

Und es folgt $P_2\left(-1{,}5 \mid \frac{3}{2}\sqrt{3}\right) \approx (-1{,}5 \mid 2{,}6)$

Ausführliche Berechnung:

$$\vec{x}\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) = \begin{pmatrix} 4\cdot\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) - \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) \\ 4\cdot\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) - \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \\ 4\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ \frac{5}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 4{,}33 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) = \begin{pmatrix} 4\cdot\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) - \cos\left(\frac{8}{3}\pi\right) \\ 4\cdot\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) - \sin\left(\frac{8}{3}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) \\ 3\cdot\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ 3\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 2{,}6 \end{pmatrix}$$

<u>Zusatzaufgabe:</u> **Berechne den Hochpunkt**, der unmittelbar links von $P_1$ liegt.
Dort muss die y-Koordinate ein Maximum haben.

Aus $y(t) = 4\cdot\sin(t) - \sin(4t)$ folgt $\dot{y}(t) = 4\cdot\cos(t) - 4\cdot\cos(4t)$.

Bedingung: $\dot{y}(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos(t) - \cos(4t) = 0$ bzw. $\cos(t) = \cos(4t)$

Ich übergebe diese Gleichung meinen CAS-Rechner CASIO ClassPad und erhalte eine lange Liste von Lösungen:

```
solve(cos(t)=cos(4t),t)
{t=6.28·constn(1),t=6.28·constn(2)−1.26,t=6.28·constn(3)+1.26,t=6.28·constn(4)+2.51,t=6.28·constn(5)+3.77,t=6.28·constn(6)−2.09,t=6.28·
```

Die erste Lösung ist $t_1 = k_1\cdot 2\pi$ In $P_1$ gibt es eine waagrechte Tangente …

Dann $t_2 = k_2\cdot 2\pi + 1{,}26$ Für $k_2 = 0$ also $t_2 = 1{,}26$ $\Rightarrow \varphi_2 = \frac{t}{\pi}\cdot 180^\circ \approx 72^O$

Dann $t_3 = k_3\cdot 2\pi + 2{,}51$ Für $k_3 = 0$ also $t_3 = 2{,}51$ $\Rightarrow \varphi_3 \approx 144^O$ usw.

Der Winkel $72^O$ führt uns zum gesuchten Hochpunkt:

$$\vec{x}(1{,}26) = \begin{pmatrix} 4\cdot\cos(1{,}26) - \cos(4\cdot 1{,}26) \\ 4\cdot\sin(1{,}26) - \sin(4\cdot 1{,}26) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}91 \\ 4{,}76 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; H_1(0{,}91 \mid 4{,}76)$$

Entsprechend findet man die anderen Punkte mit waagrechter Tangente.

Über die Bedingung $\dot{x}(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; -4\cdot\sin(t) + 4\cdot\sin(4t) = 0$ findet man die Punkte mit senkrechter Tangente, also die „Rechts- bzw. Linkspunkte", falls der Rechner da noch mithalten kann.…

## Eine Besonderheit soll noch erwähnt werden:

Im Text 54112 wird die ***Kardioide*** besprochen.

Rechts eine Abbildung dazu. Man erkennt, dass hier auch eine Epizykloide vorliegt. Und zwar gilt speziell für Kardioiden:

R = r, also is q = 1.

Der wandernde Punkt liegt also auf dem Kreisrand, also ist a = r und hier = 1.

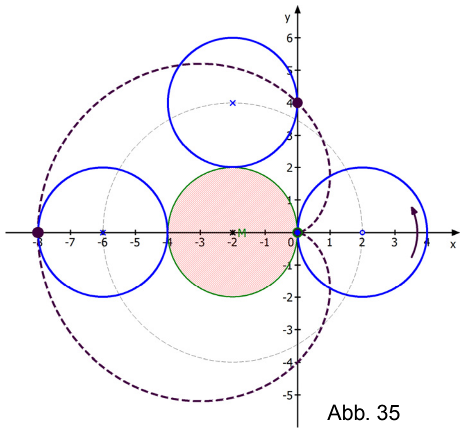
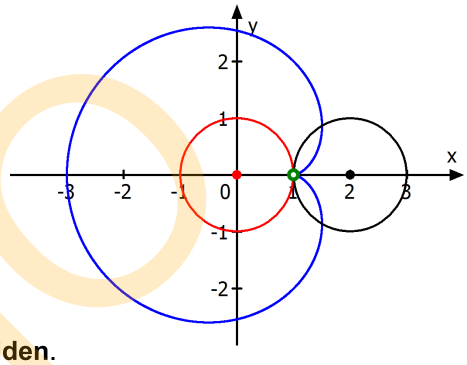


Abb. 35

Aus $\overrightarrow{OP} = r\cdot(1+q)\cdot\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix} - r\begin{pmatrix}\cos((1+q)t)\\ \sin((1+q)t)\end{pmatrix}$ folgt damit

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}2\cdot\cos(t)-\cos(2t)\\ 2\cdot\sin(t)-\sin(2t)\end{pmatrix}$$

*Jetzt hat die Kurve allerdings eine andere Lage als im angegebenen Text. Es ist klar, dass man alle diese Kurven in verschiedenen Lagen und dann durch andere Gleichungen angeben kann.*




Natürlich gibt es auch hier **verkürzte und verlängerte Epizykloiden**.

Dazu ist dann $a \neq r$: $\overrightarrow{OP} = r\cdot(1+q)\cdot\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix} - a\begin{pmatrix}\cos((1+q)t)\\ \sin((1+q)t)\end{pmatrix}$

Abb. 36

Für R = 4, r = 1 also q = 4 und a = 0,5 r erhält man diese verkürzte Epizykloide:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}5\cdot\cos(t)-\frac{1}{2}\cos(5t)\\ 5\cdot\sin(t)-\frac{1}{2}\sin(5t)\end{pmatrix}$$ (Abb. 37)

Für R = 6, r = 1, also q = 6 und a = 3r erhält man diese verlängerte Epizykloide:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}7\cdot\cos(t)-3\cos(7t)\\ 7\cdot\sin(t)-3\sin(7t)\end{pmatrix}$$ (Abb. 38)



Abb. 37

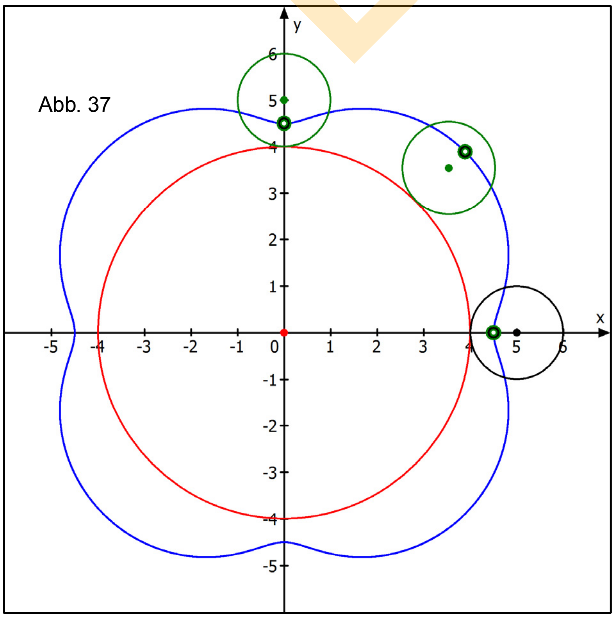
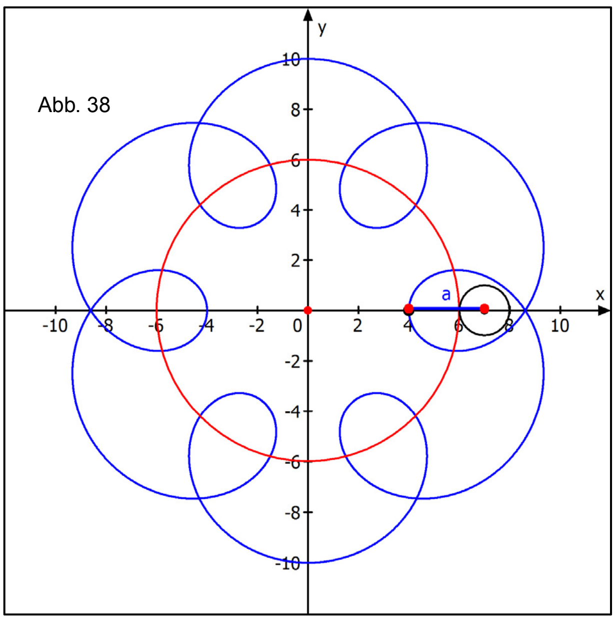


Abb. 38

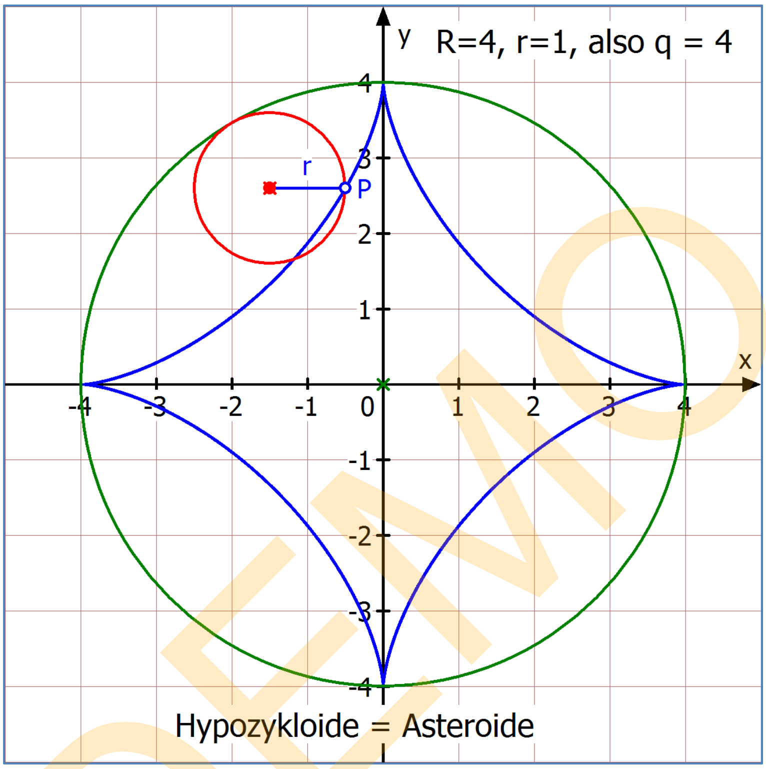


# Hypozykloiden

Lässt man einen Kreis **im Innern** des Basiskreises abrollen, dann erhält man eine Kurve namens **Hypozykloide.** Diese Kurven heißen auch **Asteroiden.**

Für sie gibt es einen eigenen Text (54115).

## Beispiel:






Diese **Hypozykloide** (Asteroide) kann man durch diese Gleichungen erzeugen:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos(t) + \cos(3t) \\ 3 \cdot \sin(t) - \sin(3t) \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad t \in [0\,;2\pi[$$

Die allgemeine Form für die Hypozykloide ist

$$\vec{x}(t) = r(q-1) \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos((q-1)t) \\ -\sin((q-1)t) \end{pmatrix}$$

# Lösungen

# Lösung (1)

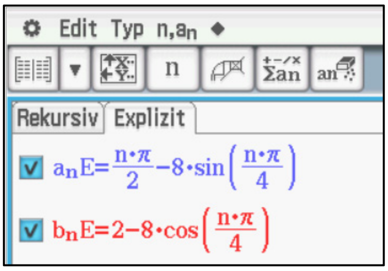
Gegeben ist die Schleifenzykloide durch

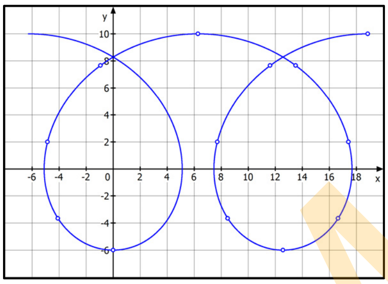
$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2t - 8\cdot\sin(t) \\ 2 - 8\cdot\cos(t) \end{pmatrix} \text{ für } t \in [-\pi; 3\pi] \quad \text{mit} \quad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 - 8\cdot\cos(t) \\ 8\cdot\sin(t) \end{pmatrix}$$

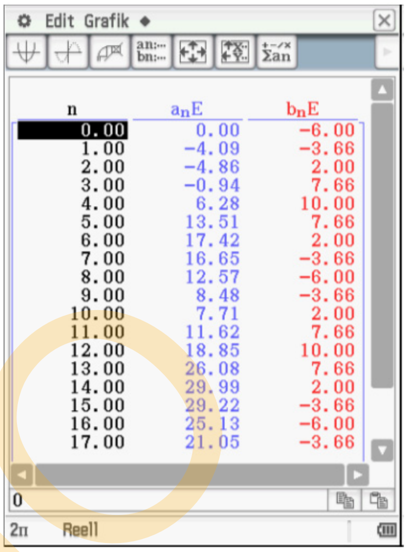
a) **Berechnung einiger Punkte mit CASIO ClassPad:**

Ich habe die Werte als Zahlenfolge berechnen lassen und für t $n\cdot\frac{1}{4}\pi$ eingegeben.

Die Abb. hat MatheGrafix erstellt.






| n | anE | bnE |
|---|---|---|
| 0.00 | 0.00 | −6.00 |
| 1.00 | −4.09 | −3.66 |
| 2.00 | −4.86 | 2.00 |
| 3.00 | −0.94 | 7.66 |
| 4.00 | 6.28 | 10.00 |
| 5.00 | 13.51 | 7.66 |
| 6.00 | 17.42 | 2.00 |
| 7.00 | 16.65 | −3.66 |
| 8.00 | 12.57 | −6.00 |
| 9.00 | 8.48 | −3.66 |
| 10.00 | 7.71 | 2.00 |
| 11.00 | 11.62 | 7.66 |
| 12.00 | 18.85 | 10.00 |
| 13.00 | 26.08 | 7.66 |
| 14.00 | 29.99 | 2.00 |
| 15.00 | 29.22 | −3.66 |
| 16.00 | 25.13 | −6.00 |
| 17.00 | 21.05 | −3.66 |

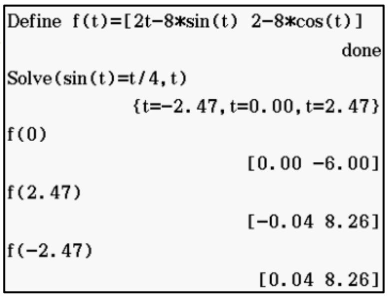
b) **Koordinaten des Doppelpunktes D auf der y-Achse:**

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2t - 8\cdot\sin(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(t) = \frac{1}{4}t$

Man erkennt, dass der Doppelpunkt näherungsweise zu

$t_{1,2} \approx \pm 2{,}47$ gehört: $D(0\,|\,8{,}26)$

CAS:



```
Define f(t)=[2t−8*sin(t)  2−8*cos(t)]
                                   done
Solve(sin(t)=t/4,t)
          {t=−2.47,t=0.00,t=2.47}
f(0)
                        [0.00 −6.00]
f(2.47)
                       [−0.04 8.26]
f(−2.47)
                         [0.04 8.26]
```

c) **Welche Gleichungen haben die Tangenten in D?**

Aus $\dot{x}(\pm 2{,}47) = 2 - 8\cdot\cos(\pm 2{,}47) \approx 8{,}26$

und $\dot{y}(\pm 2{,}47) = 8\cdot\sin(\pm 2{,}47) \approx \pm 5$

die Steigungen: $m_T(x=0) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\pm 5}{8{,}26} \approx \pm 0{,}605$

Tangente $T_1$: $y - 8{,}26 = 0{,}605\cdot(x-0) \quad \Leftrightarrow \quad y = 0{,}605\cdot x + 8{,}26$

Tangente $T_2$: $y - 8{,}26 = -0{,}605\cdot(x-0) \quad \Leftrightarrow \quad y = -0{,}605\cdot x + 8{,}26$

Vektorielle Lösung: Richtungsvektor: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 8{,}26 \\ \pm 5 \end{pmatrix}$

Tangenten: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8{,}26 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 8{,}26 \\ \pm 5 \end{pmatrix}$

d) **Unter welchem Winkel schneiden sich die Tangenten in D?**

$$\tan\gamma_1 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1\cdot m_2} = \frac{0{,}605 + 0{,}605}{1 - 0{,}605^2} \Rightarrow \gamma_1 = \arctan\left(\frac{0{,}605+0{,}605}{1-0{,}605^2}\right) \approx 62{,}3^\circ, \quad \gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1 \approx 117{,}7^\circ$$

Vektoriell:
$$\cos\gamma = \frac{\begin{pmatrix} 8{,}26 \\ 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 8{,}26 \\ -5 \end{pmatrix}}{\sqrt{8{,}26^2+25}\cdot\sqrt{8{,}26^2+25}} = \frac{8{,}26^2 - 25}{8{,}26^2 + 25} \Rightarrow \gamma_1 = \arccos\left(\frac{8{,}26^2-25}{8{,}26^2+25}\right) \approx 62{,}4^\circ \text{ ....}$$

e) Berechne die Nullstellen im Bereich $[-\pi\,;3\pi]$:

Bedingung: $y(t)=0 \;\Leftrightarrow\; 2-8\cdot\cos(t)=0 \;\Leftrightarrow\; \cos(t)=\frac{1}{4} \;\Rightarrow\; t_{1,2}=\pm 1{,}32+z\cdot\pi$

Davon sind im Bereich $[-\pi\,;3\pi]$:

x-Koordinaten: $x(t)=2t-8\cdot\sin(t)$

Berechnung mit CAS:

```
Define x(t)=2*t-8*sin(t)
                              done
x(-1.32)
                              5.11
x(1.32)
                             -5.11
x(1.32+2π)
                              7.46
x(-1.32+2π)
                             17.68
```

f) Bestimme für das Intervall $[-\pi\,;3\pi]$ Hochpunkte, Tiefpunkte, Rechtspunkte und Linkspunkte.

$\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}2t-8\cdot\sin(t)\\2-8\cdot\cos(t)\end{pmatrix}$ mit $\dot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}2-8\cdot\cos(t)\\8\cdot\sin(t)\end{pmatrix}$ und $\ddot{\vec{x}}(t)=\begin{pmatrix}8\cdot\sin(t)\\8\cdot\cos(t)\end{pmatrix}$

**Bedingung für Hoch- und Tiefpunkte:**

$\dot{y}(t)=0 \;\Leftrightarrow\; 8\cdot\sin(t)=0 \;\Leftrightarrow\; \sin(t)=0 \;\Rightarrow\; t\in\{-\pi\,;0\,;\pi\,;2\pi\,;3\pi\}$

$t=-\pi$: $\dot{y}(-\pi)=8\cdot\cos(-\pi)=8\cdot(-1)<0 \;\Rightarrow$ Hochpunkt: $H_1(-2\pi\,|\,10)$, denn
$x(-\pi)=-2\pi-8\cdot\sin(-\pi)=-2\pi\approx-6{,}28$ $\quad y(-\pi)=2-8\cdot\cos(-\pi)=2-8\cdot(-1)=10$

$t=0$: $\dot{y}(0)=8\cdot\cos(0)=8\cdot(1)>0 \;\Rightarrow$ Tiefpunkt: $T_1(0\,|\,-6)$, denn
$x(0)=2\cdot0-8\cdot\sin(0)=0$ $\quad y(0)=2-8\cdot\cos(0)=2-8\cdot1=-6$

$t=\pi$: $\dot{y}(\pi)=8\cdot\cos(\pi)=8\cdot(-1)<0 \;\Rightarrow$ Hochpunkt: $H_2(2\pi\,|\,10)$, denn
$x(\pi)=2\cdot\pi-8\cdot\sin(\pi)=2\pi\approx6{,}28$ $\quad y(\pi)=2-8\cdot\cos(\pi)=2-8\cdot(-1)=10$

$t=2\pi$: $\dot{y}(2\pi)=8\cdot\cos(2\pi)=8\cdot(1)>0 \;\Rightarrow\; \pm$ Tiefpunkt: $T_2(4\pi\,|\,-6)$, denn
$x(2\pi)=2\cdot2\pi-8\cdot\sin(2\pi)=4\pi$ $\quad y(2\pi)=2-8\cdot\cos(2\pi)=2-8\cdot1=-6$

$t=3\pi$: $\dot{y}(3\pi)=8\cdot\cos(3\pi)=8\cdot(-1)<0 \;\Rightarrow$ Hochpunkt: $H_3(6\pi\,|\,10)$, denn
$x(3\pi)=2\cdot3\pi-8\cdot\sin(3\pi)=6\pi\approx18{,}85$ $\quad y(3\pi)=2-8\cdot\cos(3\pi)=2-8\cdot(-1)=10$

## Bedingung für Rechts- und Linkspunkte:

$\dot{x}(t)=0 \;\Leftrightarrow\; 2-8\cdot\cos(t)=0 \;\Leftrightarrow\; \cos(t)=\frac{1}{4} \;\Rightarrow\; t_{1,2}=\pm1{,}32+z\cdot2\pi,\; z\in\mathbb{Z}$

Das sind genau die Nullstellen (x-Koordinaten siehe Tabelle oben).

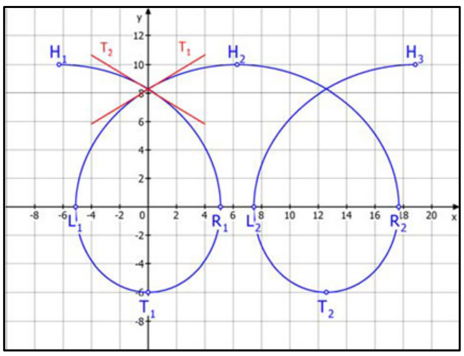
$t=-1{,}32$: $\dot{x}(-1{,}32)=8\cdot\sin(-1{,}32)\approx-7{,}7<0$ Rechtspunkt: $R_1(5{,}11\,|\,0)$

$t=1{,}32$: $\dot{x}(1{,}32)=8\cdot\sin(1{,}32)\approx7{,}7>0$ Linkspunkt: $L_1(-5{,}11\,|\,0)$

$t=-1{,}32+2\pi$: $\dot{x}(-1{,}32+2\pi)=8\cdot\sin(-1{,}32+2\pi)\approx-7{,}7<0$ Rechtspunkt: $R_2(17{,}68\,|\,0)$

$t=1{,}32:+2\pi$ $\dot{x}(1{,}32+2\pi)=8\cdot\sin(1{,}32+2\pi)\approx7{,}7>0$ Linkspunkt: $L_2(7{,}46\,|\,0)$

Hier eine Abbildung mit den eingetragenen Extrempunkten.



g) **Berechne die Bogenlänge einer Schlinge.**

**Formel:** $b=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt \;=\; \int_{-2,47}^{2,47}\sqrt{(2-8\cdot\cos(t))^2+(8\cdot\sin(t))^2}\,dt$

NR.: $(2-8\cdot\cos(t))^2+(8\cdot\sin(t))^2=4-32\cdot\cos(t)+\underbrace{64\cdot\cos^2(t)+64\cdot\sin^2(t)}_{=64}=68-32\cdot\cos(t)$

$$b=\int_{-2,47}^{2,47}\sqrt{68-32\cdot\cos(t)}\,dt\approx 37{,}78$$

```
2*∫[0, 2.47] √(68-32*cos(t)) dt
                                   37.78
Define x(t)=2*t-8*sin(t)
                                    done
Define y(t)=2-8*cos(t)
                                    done
2*∫[0, 2.47] √((d/dt(x(t)))^2+(d/dt(y(t)))^2) dt
                                   37.78
```

Die Berechnung mit CASIO ClassPad geschah auf zwei Arten:

In der 1. Zeile habe ich mein vereinfachtes Integral ausrechnen lassen.

Von der 2. bis 4. Zeile wurde die Bogenlängenformel verwendet.

h) **Berechne den Flächeninhalt einer Schlinge.**

**Formel:** $A=\int_{t_1}^{t_2} y\cdot\dot{x}(t)\,dt=2\int_0^{2,47}(2-8\cdot\cos(t))^2dt=2\int_0^{2,47}\left(4-32\cdot\cos(t)+64\cdot\cos^2(t)\right)dt$

$$A=2\cdot\left[4t-32\cdot\sin(t)\right]_0^{2,47}+128\cdot\int_0^{2,47}\cos^2(t)\,dt$$

NR.: $\int\cos^2(t)\,dt=\int\underbrace{\cos(t)}_{u'}\cdot\underbrace{\cos(t)}_{v}\,dt$ wird partiell integriert:

**Formel:** $\int u'\cdot v\,dt=u\cdot v-\int u\cdot v'\,dt$ mit $u'=\cos(t)\;\Rightarrow\;u=\sin(t)$, $v=\cos(t)\;\Rightarrow\;v'=-\sin(t)$

$$\int\cos^2(t)\,dt=\sin(t)\cdot\cos(t)+\int\sin^2(t)\,dt=\sin(t)\cdot\cos(t)+\int\left(1-\cos^2(t)\right)dt$$

$$\int\cos^2(t)\,dt=\sin(t)\cdot\cos(t)+t-\int\cos^2(t)\,dt \qquad \left|+\int\cos^2(t)\,dt\right. \quad \text{als Gleichung!}$$

$$2\cdot\int\cos^2(t)\,dt=\sin(t)\cdot\cos(t)+t \;\Rightarrow\; \boxed{\int\cos^2(t)\,dt=\tfrac{1}{2}\sin(t)\cdot\cos(t)+\tfrac{1}{2}t}$$

$$A=2\cdot\left[4t-32\cdot\sin(t)\right]_0^{2,47}+128\cdot\left[\tfrac{1}{2}\sin(t)\cdot\cos(t)+\tfrac{1}{2}t\right]_0^{2,47}$$

$$A=\left[72t-64\cdot\sin(t)+64\sin(t)\cdot\cos(t)\right]_0^{2,47}\approx 106{,}84$$

```
2∫[0, 2.47] (2-8*cos(t))^2 dt
                                  106.84
```

(Im Bogenmaß rechnen!)

i) **Volumen des tropfenförmigen Rotationskörpers:**

**Formel:** $V=\pi\cdot\int_9^{2,47}\dot{y}(t)\cdot(x(t))^2\,dt=\pi\cdot\int_0^{2,47}8\cdot\sin(t)\cdot(2t-8\cdot\sin(t))^2dt\approx 716{,}66$ VE (CAS)

## Lösung (2)

Zeige für die allgemeine Schleifenzykloide:
Alle Links- und Rechtspunkte liegen auf der x-Achse.

Gegeben ist $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot t - d \cdot \sin(t) \\ r - d \cdot \cos(t) \end{pmatrix}$ mit d > r $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} r - d \cdot \cos(t) \\ d \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$

Notwendige Bedingung für Links- und Rechtspunkte: $\dot{x}(t) = 0$

(Die hinreichende Bedingung ist dann noch $\ddot{x}(t) \neq 0$.

$r - d \cdot \cos(t) = 0$

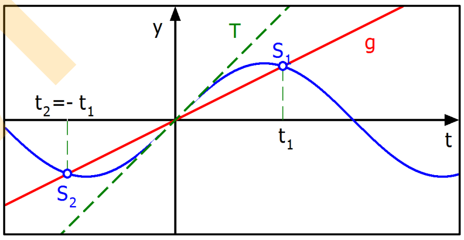
Das heißt aber zugleich: $y(t) = 0$.

Also liegen die Punkte auf der x-Achse.

## Lösung (3)

a) Zeige für die allgemeine Schleifenzykloide:
Ein Doppelpunkt liegt auf der y-Achse, wenn $-\pi < t < \pi$ ist.

$x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r \cdot t - d \cdot \sin(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\sin(t) = \frac{r}{d} \cdot t} \quad (*)$




Die Abbildung zeigt die Sinuskurve und die Gerade g: $y = \frac{r}{d} \cdot t$.

g schneidet die Sinuskurve rechts von x = 0,

wenn ihre Steigung kleiner als 1 ist, denn die Tangente in O hat die Steigung 1, also für

$\frac{r}{d} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad r < d$.

Die Gleichung (*) hat also 2 Lösungen $t_1$ und $t_2$ im Intervall $]-\pi ; \pi[$, das ergibt den Doppelpunkt. Wegen der Punktsymmetrie der ganzen Anordnung gilt $t_2 = -t_1$.

b) Für welche Werte von d liegen bei gegebenem r die Doppelpunkte auf Höhe des Mittelpunktes des abrollenden Kreises?

Wenn der Doppelpunkt mit $M(0 \mid r)$ zusammenfällt,

dann ist erstens y = r, d. h. $r - d \cdot \cos(t) = r$

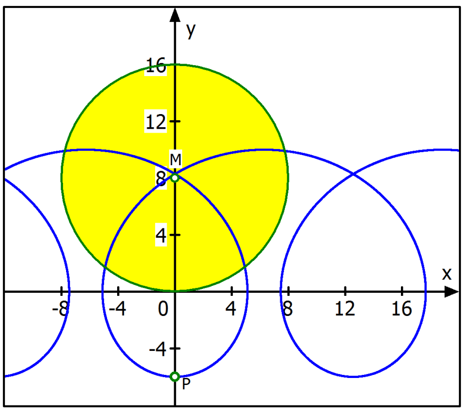
$d \cdot \cos(t) = 0$

Eine Lösung ist $t = \frac{1}{2}\pi$.

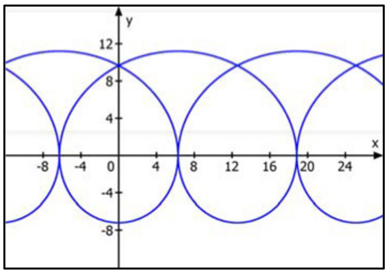
Und zweitens ist x = 0, d. h. $r \cdot t - d \cdot \sin(t) = 0$

$r \cdot \frac{1}{2}\pi - d \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)}_{1} = 0$

Daraus folgt: $d = \frac{1}{2}\pi \cdot r$.



c) **Für welches d berühren sich die Schlingen, wenn r gegeben ist?**



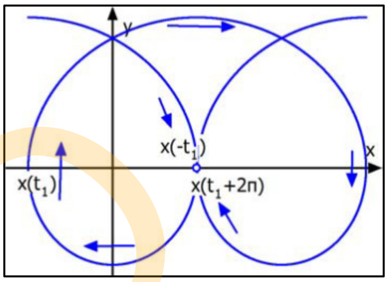

Erkennen: Die Berührpunkte müssen Links- bzw. Rechtspunkte sein, und nach Aufgabe (2) liegen diese stets auf der x-Achse.

Bedingung also: $y = 0 \;\Leftrightarrow\; r - d\cdot\cos(t) = 0$

d. h. $\cos(t) = \frac{r}{d}$

Diese Gleichung hat zwei Lösungen $t_1$ und $t_2$.

Wenn bei $-t_1$ ein Rechtspunkt liegt, dann ist bei $t_1$ ein Linkspunkt.




Weitere Lösungen ergeben sich durch die Periodizität bei $t_3 = t_1 + 2\pi$ (Linkspunkt) usw.

Berührung findet also statt für $x(-t_1) = x(t_1 + 2\pi)$

Das heißt aber

$$r\cdot(-t_1) - d\cdot\sin(-t_1) = r\cdot(t_1 + 2\pi) - d\cdot\sin(t_1 + 2\pi)$$

WISSEN: $\sin(t_1 + 2\pi) = \sin(t_1)$ und $\sin(-t_1) = -\sin(t_1)$

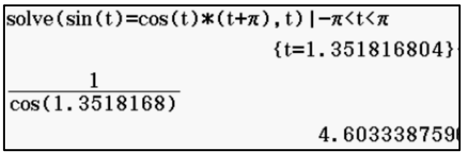
Also: $-r\cdot t_1 + d\cdot\sin(t_1) = r\cdot(t_1 + 2\pi) - d\cdot\sin(t_1)$

$2d\cdot\sin(t_1) = 2r\cdot t_1 + 2\pi r$

$$\sin(t_1) = \frac{r\cdot t_1 + \pi r}{d} = \frac{r}{d}\cdot(t_1 + \pi)$$

Ersetzt man $\cos(t) = \frac{r}{d}$,

dann erhält man $\sin(t_1) = \cos(t_1)\cdot(t_1 + \pi)$




Ich übergebe diese Gleichung meinem CAS-Rechner.
Um die Anzahl der Lösungen einzuschränken,
gebe ich hinter dem Bedingungsstrich das Intervall $-\pi < t < \pi$ ein:

Aus $\cos(t) = \frac{r}{d}$ folgt dann $d = \frac{r}{\cos(t_1)} \approx 4{,}603\cdot r$